مروری بر مسائل پایه جایابی تسهیلات

A Review on Basic Facility Location problems

دکتر قادری
دانشگاه کردستان

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

۱- مقدمه

در ادامه سعی خواهد مروری کلی بر مدل‌های پایه مکان‌یابی تسهیلات صورت گیرد. نخست به مباحث مختلف مسائل جایابی تسهیلات پرداخته خواهد شد. برخی از حالاتی که در ادبیات موضوع و در این حوزه بررسی شده‌اند، به صورت دسته‌بندی شده همراه با مدلهایشان آورده خواهند شد.

در مسائل واقعی موقعی که تصمیم‌گیرندگان می‌خواهند تسهیلات جدیدی را جایابی نمایند، ابتدا بایستی تقاضای بازار مشتریان موجود و همچنین مشتریان بالقوه را پیش‌بینی نموده و سپس بایستی مکان و تعداد بهینه تسهیلات جدیدی را که به بهترین نحو به مشتریان خدمت دهند را مشخص نمایند. این حوزه از علم به مسائل جایابی مشهور هستند. مسائل جایابی به صورت وسیعی در مسائل جهان واقعی از قبیل: جایابی انبارها، کارخانجات تولیدی، ایجاد مکان‌های عمومی (ایستگاه‌های آتش‌نشانی، مراکز آموزشی، ایستگاههای سوخت‌رسانی و ...)، مراکز دفع ذباله و مواردی از این قبیل به کار گرفته می‌شوند [1].

نخستین مسئله جایابی توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام Pierre de Fermat در سالهای 1600 مطرح گردید. مسئله مطرح شده توسط ایشان بدین صورت بود: اگر مثلث ABC وجود داشته باشد نقطه‌ای که کوچکترین فاصله را از نقاط مثلث دارد در کجا قرار می‌گیرد؟ این مسئله توسط شاگرد Fermat، یعنی Evangelista Torricelli در سال 1640 حل گردید. مسئله جایابی تسهیلات به صورت امروزی نخستین بار توسط اقتصاد دان آلمانی آلفرد وبر[1]در سال 1909 برای جایابی تک وسیله‌ای در جهت کمینه نمودن فاصله مابین تسهیل و مشتریان پیشنهاد گردید [2]. بعد از وبر که مسئله جایابی تک وسیله‌ای را مطرح نمود، تاکنون محققان زیادی وقت خود را صرف تحقیق در این حوزه گذاشته و مسائل جایابی متنوعی توسط آنان

---

۱. Alfred Weber

توسعه داده شده‌اند. در سال 1937 ریاضیدان بلغاری الگوریتمی ارائه نمود که حل بهینه مسئله مطـرح شـده توسط وبر در حالت پیوسته را بدست می‌آورد [3].

چهار مولفه اصلی که مسائل جایابی را مشخص می‌نمایند، عبارتند از: 1) مشـتریان، کـه دارای تقاضا بوده و مکان آنها از قبل مشخص می‌باشد؛ 2) تسهیلاتی کـه بایسـتی قـرار داده شـوند؛ 3) فضـایی کـه مشتریان و تسهیلات در آن قرار خواهند گرفت؛ 4) مبنای انـدازه گیـری کـه برحسـب فاصـله یـا زمـان بـین مشتریان و تسهیلات می‌باشد.

بر اساس چهار فاکتور ذکر شده می توان مسائل مکانیابی را به شکل زیردسته بندی نمود:

- مسائل مکانیابی پایه
- مسائل مکانیابی بر روی سطح و بر روی شبکه
- مسائل مکانیابی با وسائل یکسان و غیر یکسان
- مسائل مکانیابی با برای یک تجهیز یا چند تجهیز
- مسائل مکانیابی با هزینه استقرار و بدون هزینه استقرار
- مسائل مکانیابی خوشایند و ناخوشایند
- مسائل مکانیابی با ظرفیت محدود و نامحدود
- مسائل مکانیابی خصوصی و عمومی
- مسائل مکانیابی با وزن قطعی،احتمالی،فازی
- مسائل مکانیابی بدون فاکتور زمان و با فاکتور زمان
- مسائل مکانیابی ترکیبی
- مسائل مکانیابی در بازه پیوسته یا در بازه گسسته

Current و همکارانش برخی از مدلهای جایابی شبکه گسسته رابه صورت زیر بیان کردند[4]. این مدلها عبارتند از:

- p-center
- p-dispersion
- p-median
- fixed charge
- hub

- covering (including set-covering and maximal covering)
- maxisum

ضمناً لازم به ذکر می‌باشد که درنامگذاری دیگری، مدلهای ذکر شده در فوق که با عنوان مشخصی مدل شده‌اند والگوریتم های معینی برای حلشان بدست آمده است را تحت عنوان مسائل مکانیابی پایه در نظر می‌گیرند. در ادامه به بررسی مختصر هر کدام از این مدلها می‌پردازیم.

مدلهای جایابی تسهیلات می‌توانند در موارد مختلفی از قبیل: تابع هدف، مبنای اندازه‌گیری، تعداد و اندازه تسهیلاتی که بایستی قرار داده شوند و مواردی از این قبیل با هم فرق می‌کنند. بسته به فرضیات در نظر گرفته شده مدلهای زیادی برای مسائل جایابی تسهیلات ارائه گردیده‌اند.

۲- مبنای اندازه‌گیری فاصله

مبنای اندازه‌گیری فاصله در حالت کلی بین تسهیلات و مشتریان از فاصله مینکوسکی[1]محاسبه می‌گردد. فاصله بین مشتری قرار گرفته در موقعیت $A_j=(a_j,b_j)$ و تسهیل قرار گرفته در $X_i=(x_i,y_i)$ در حالت کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d(A_j,X_i)=l_p=(\left|(x_i-a_j)^p\right|+\left|(y_i-b_j)^p\right|)^{1/p} \qquad (1\text{-}1)$$

که در مقالات اکثراً از دو مورد l_1,l_2 استفاده می‌گردد و به ترتیب فاصله پله‌ای[2] (منهتن[3]) و فاصله مستقیم[4](مربعی) نامیده شده‌اند. در ضمن هر چه مقدار p بیشتر شود، مبنای فاصله کاهش می‌یابد. فاصله پله‌ای با عناوین زیر نیز در ادبیات موضوع مشاهده گردیده است:

(Rectilinear, Rectangular, cityblock, taxi, Manhattan, Hamming Distance)

---

۱. Minkowski
۲.Rectilinear or Rectangular
۳. Manhattan
۴. Euclidean

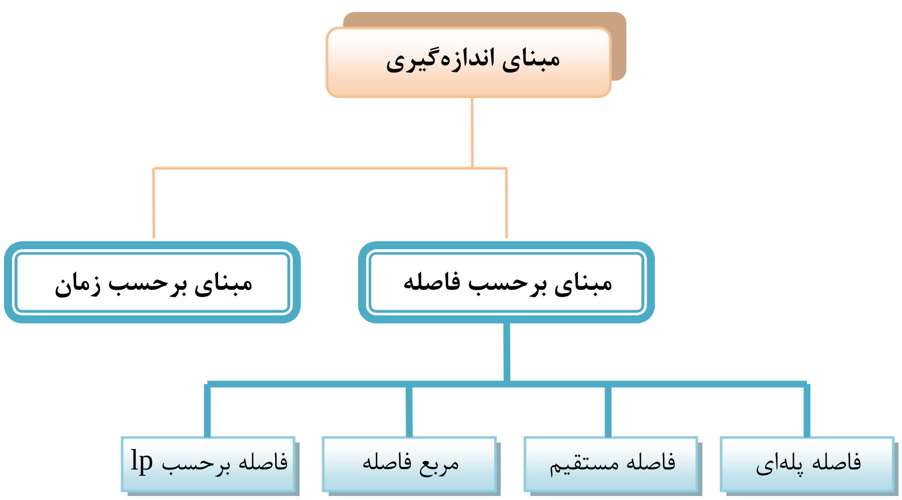
فاصله پله‌ای اغلب در خیابانهای شهری و شبکه‌ای از راهروها استفاده می‌شود. در این حالت می‌توان تابع هدف را به صورت جداگانه بر حسب x و y نوشت و مسئله قابل تجزیه بوده به طوریکه هر کدام با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی قابل حل می‌باشند.

فاصله مستقیم نسبت به سایر موارد بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت کوتاهترین مسیر بین دو نقطه محاسبه خواهد شد.

$$\begin{cases} p=1 & \Rightarrow \quad l_1=\left(|x_i-a_j|+|y_i-b_j|\right) \\ p=2 & \Rightarrow \quad l_2=\left((x_i-a_j)^2+(y_i-b_j)^2\right)^{1/2} \end{cases} \tag{1-2}$$

و در حالتیکه مقدار p به سمت بینهایت میل کند، فاصله عبارت خواهد بود از رابطه زیر و به فاصله چبیشوف[1]مشهور است.

$$if \quad p=\infty \quad \Rightarrow l_\infty=\max\left\{|x_i-a_j|,|y_i-b_j|\right\} \tag{1-3}$$



شکل1 : : مبنای اندازه‌گیری فاصله در مسائل جایابی

[1]. Chebyshev

در مسائل جهان واقعی، فاصله بین دو شهر یا دو مکان به سادگی مدلهای ریاضی اشاره شده نمی‌باشد. با این حال در نظر گرفتن کلیه شرایط واقعی برای فاصله منجر به بالا رفتن پیچیدگی آن خواهد شد. یک راه جهت برخورد با این مشکل این است که ضرایبی از فاصله مستقیم را جهت معیار فاصله در نظر می‌گیرند. برای مثال، در شهرهای بزرگ ایالات متعده، نرخ فاصله واقعی را حدود 1,18 برابر فاصله مستقیم در نظر می‌گیرند [5].

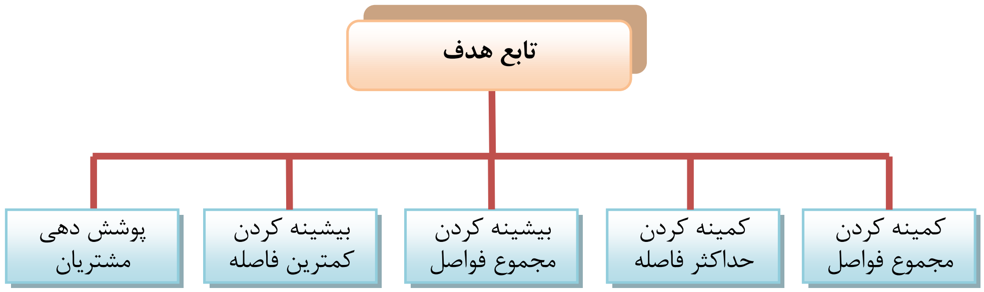
نکته دیگری که بایستی بدان اشاره شود این است که در برخی مواقع در حالات گسسته و یا مدلهای جایابی شبکه مبنای اندازه‌گیری برحسب زمان بین دونقطه بیان می‌گردد تا بر مبنای فاصله بین آنها. با این حال در مدلهای جایابی پیوسته، در نظر گرفتن زمان مورد نیاز بین دو موقعیت به علت حرکت آنها در فضای جواب بسیار مشکل است.

۳- تابع هدف مسائل جایابی

در مسائل جایابی اغلب دو نوع تابع هدف مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. کمینه کردن مجموع هزینه‌ها[1] و کمینه نمودن بیشترین فاصله[2]. این نوع مسائل به ترتیب به مسائل میانه[3] و مرکز[4] مشهور هستند. ولی با این حال در برخی مواقع توابعی از نوع بیشینه نمودن مجموع فواصل[5] و بیشینه نمودن کمترین فاصله[6] در ادبیات مشاهده گردیده‌اند [6]. دسته دیگر توابع مشاهده شده در ادبیات مسائل پوششی می‌باشد که خود آن نیز از دو نوع پوشش قطعی و حداکثر پوشش تشکیل یافته است. در ادامه و در بخش مدلهای جایابی به صورت مفصل انواع اهداف آورده خواهند شد.

---

۱. MiniSum
۲. Minimax
۳. Median Problem
۴. Center Problem
۵. MaxiSum
۶. MaxiMin



شکل 2: **تابع هدف در مسائل جایابی**

۴- عدم قطعیت در مدلهای جایابی

در مسائل جایابی در صورتیکه پارامترهای مدل از قبل مشخص و معین باشند، مدل به صورت قطعی بوده و خروجی آن مقدار مشخصی است. با این حال در دنیای واقعی تعیین دقیق میزان هر یک از پارامترها از جمله: هزینه‌ها، تقاضای مشتریان، زمان‌های مسافرت و سایر موارد تقریباً غیر ممکن می‌باشد، لذا عدم قطعیت در این مسائل رخ خواهد داد. لاورنس[1]در سال 2006 مرور جامعی را بر روی مسائل جایابی در حالت عدم قطعیت انجام داده است[7] .

روزندهید[2]محیط تصمیم‌گیری را به سه دسته روبه‌رو تقسیم نموده است: 1) قطعیت؛ 2) ریسک؛ 3) عدم قطعیت. در حالت قطعی، کلیه پارامترهای معین و شناخته شده‌اند، در حالیکه در وضعیت‌های ریسک و عدم قطعیت هر دو دارای مقادیر تصادفی هستند. در حالت ریسک، برای پارامترهای غیرقطعی توزیع‌های احتمالی مشخصی توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود؛ ولی در حالت عدم قطعیت علاوه بر نامشخص بودن پارامترهای اطلاعاتی نیز در مورد آنها در نظر گرفته نمی‌شود. مسائل در حالت ریسک به مسائل بهینه-سازی احتمالی[3]نیز شناخته می‌شوند. تابع هدف در این وضعیت اغلب به صورت مقدار مورد انتظار در نظر

[1]. Lawrence
[2]. Rosenhead
[3]. Stochastic Optimization Problems

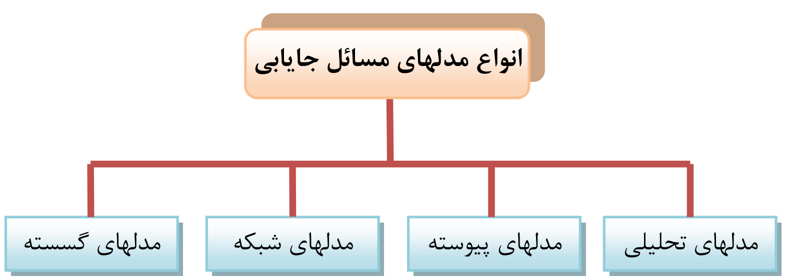
گرفته می‌شود. مسائل تحت عدم قطعیت به مسائل بهینه‌سازی پایدار[1]که اغلب در جهت بهینه‌سازی سیستم در بدترین حالت می‌باشند، شناخته شده‌اند.

۵- مدلهای جایابی دینامیک

ماهیت استراتژیک مسایل جایابی تسهیلات نیازمند در نظر گرفتن تعدادی از پارامترهای غیرقطعی در آینده می‌باشد. از آنجاکه سرمایه مورد نیاز جایابی یا جایابی‌مجدد تسهیلات زیاد بوده، لذا بایستی تسهیلات در دوره زمانی مشخصی عملکرد مناسبی داشته باشند. تصمیم‌گیران، نه تنها بایستی مکان‌های پایا جهت جایابی تسهیلات انتخاب کنند که جوابگوی تغییرات تقاضا در طول زمان باشد بلکه زمان بسط و توسعه تسهیلات و جایابی مجدد در بلند مدت را در نظر بگیرد. به مدل‌های مکان‌یابی تسهیلات که در آنها پارامترهای مسئله در طی افق برنامه زمانی تغییر می‌نمایند، مدل‌های پویا یا دینامیک اطلاق می‌گردند.

۶- انواع مدلهای مسائل جایابی

رول و همکاران[2]مدلهای جایابی را به چهار دسته تقسیم نموده‌اند که در ادامه هر کدام از آنها تشریح شده و در **شکل** 3 نشان داده شده‌اند [8].



شکل 3: **طبقه‌بندی مدلهای جایابی**

1) **مدلهای تحلیلی**: مدلهای مذکور ساده‌ترین مدلهای جایابی بوده و متکی به تعداد بسیار زیادی فرضیات ساده‌کننده می‌باشند. برای نمونه، یک مدل تحلیلی فرض می‌نماید که تقاضاها به

[1]. Robust Optimization Problems
[2]. Revelle and et al.

صورت یکنواخت و با چگالی ρ در سراسر ناحیه خدمت پراکنده شده و تسهیلات در هر نقطه-ای از ناحیه ممکن است قرار بگیرند. این مدلها اغلب به کمک روشهای ریاضی و تکنیک‌های ساده قابل حل می‌باشند.

2) **مدلهای پیوسته**: این مدلها فرض می‌نمایند که تسهیلات می‌توانند در هر جایی از ناحیه خدمت قرار گیرند در حالیکه تقاضاها ممکن است اغلب در مکان‌های گسسته‌ای باشد. مدل کلاسیک این دسته از مسائل، مسئله **مشهور وبر** است که هدف آن قرارگیری یک تسهیل بین مشتریان می‌باشد. از این نوع مدل‌ها در برخی از کاربردهای واقعی استفاده خواهد شد. برای نمونه در جایابی دوربین‌های ویدویی و یا حس‌گرهای آلودگی جهت نظارت بر محیط از این نوع مدل‌ها استفاده خواهد شد.

3) **مدلهای شبکه**: این نوع مدلها متشکل از گره‌ها و خطوط واصل بین این گره‌ها می‌باشند. تقاضاها اغلب بر روی گره‌ها قرار می‌گیرند ولی در برخی از موارد نیز امکان دارد بر روی خطوط نیز تقاضا وجود داشته باشد. با این حال، تسهیلات جدید در هر جایی از شبکه می‌توانند واقع شوند. یک مثال عملی از اینکه ممکن است تقاضا هم بر روی گره‌ها و هم بر روی خطوط قرار بگیرد، تقاضا برای خدمات اضطراری در بزرگراه‌ها می‌باشد. مدل 1-median on a tree به این دسته از مسائل تعلق دارد.

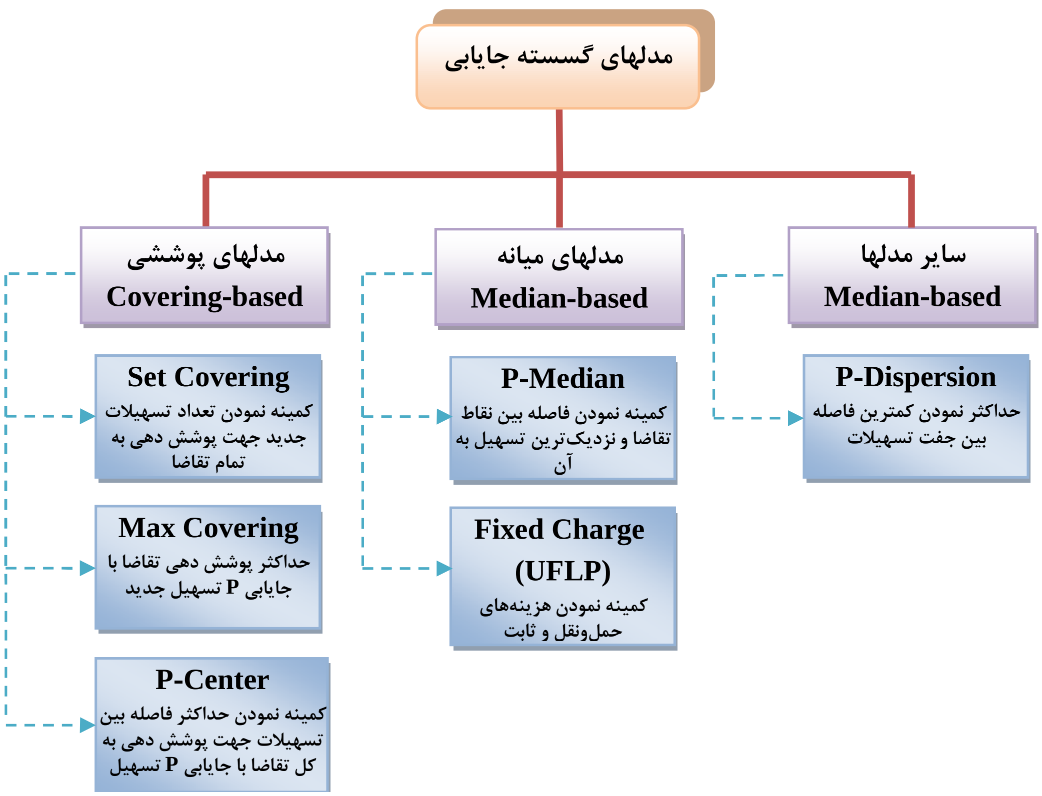
4) **مدلهای گسسته**: در این دسته از مدل‌ها مجموعه‌ای گسسته از تقاضاها، I ، و مجموعه‌ای گسسته از مکان‌های کاندید، J ، فرض خواهد شد. این قبیل از مسائل اغلب به صورت مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح یا عدد صحیح مختلط فرموله می‌شوند. اکثر این مسائل NP-Hard بوده و به همین دلیل نیز روشهای ابتکاری زیادی در ادبیات موضوع برای حل این مسائل

پیشنهاد شده‌اند. این دسته از مسائل به صورت وسیعی در کاربردهای عملی نیز مشاهده می‌شوند. داسکین[1] مدل‌های جایابی گسسته را به سه دسته که در شکل 4 نشان داده شده‌اند طبقه‌بندی نموده است[9]. در ادامه سعی خواهد شد انواع مختلف این مدلها تشریح گردند.

1-6 مدلهای گسسته مکان‌یابی

1-1-6 مدلهای پوششی

به مسائلی که در جهت پوشش دهی به مجموعه‌ای از مشتریان می‌باشند، مسائل پوششی مجموعه اطلاق می‌گردند. در مسائل پوششی، هدف کمینه کردن هزینه جایابی تسهیلات به طوریکه میزان مشخصی از نواحی را پوشش دهند می‌باشد. این مسائل متشکل از مشتقات مختلفی از قبیل: مسئله پوشش قطعی مجموعه، مسئله حداکثر پوشش مجموعه و ... بوده و کاربردهای وسیعی را در مسائل جهان واقعی دارند.



شکل 4: مدل های مختلف مسائل جایابی گسسته

[1]. Daskin

1-1-1-6 مدل پوشش قطعی

هدف این مدل کمینه نمودن تعداد تسهیلات مورد نیاز جهت پوشش‌دهی به کلیه تقاضاها می‌باشد. پارامترها و مدل پوشش قطعی در جدول 1 نمایش داده شده‌اند. مدل مذکور دارای معایبی از قبیل موارد زیر می‌باشد:

1- عدم وجود بودجه کافی جایابی تسهیلات جهت پوشش دهی به کلیه نقاط تقاضا
2- وجود جوابهای بهینه چندگانه در مدل
3- عدم تمایز بین گره‌های با تقاضای کم و زیاد

جدول 1: مدل قطعی پوشش مجموعه و پارامترهای آن

مدل مسئله	مقادیر معلوم مدل	متغیرهای تصمیم مسئله
$\min \sum_{k=1}^{K} x_k$ (1) $\sum_{k\in N_l} x_k \geq 1 \quad \forall l$ (2) $x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K$ (3)	K: تعداد مشتریان N_l: مجموعه سایت‌هایی که در ناحیه قابل قبول گره l اُم قرار دارند که در آن: $N_l=\{k \mid d_{lk}<=S\}$ S: فاصله (زمان) پوشش d_{lk}: فاصله (زمان) بین دو گره l و k c_k: هزینه ثابت ساخت تسهیل در مکان k	x_k: اگر سایت k اُم فعال باشد برابر یک در غیر اینصورت صفر است.

تابع هدف (1) تعداد تسهیلات فعال شده را مینیمم می‌کند. محدودیت (2) باعث می‌شود هر گره تقاضا با حداقل یک تسهیل پوشش داده شود. محدودیت (3) نشان می‌دهد که x_k یک متغیر «صفر و یک» است. همچنین تابع هدف می‌تواند با در نظر گرفتن هزینه‌های خاص هر محل به عنوان ضرایب متغیرهای تصمیم، تعمیم یابد. در این حالت هدف بجای کمینه کردن تعداد تسهیلات، کمینه کردن کل هزینه ثابت می‌باشد.

$$\min \sum_{k=1}^{K} c_k x_k \qquad (2)$$

6-1-1-2 مسئله جایابی حداکثر پوشش MCLP[1]

در این مدل هدف جایابی P تسهیل بوده که حداکثر میزان تقاضاها را پوشش دهند. این مدل معایب مدل قبلی را برطرف نموده است. مساله جایابی حداکثر پوشش برای مواقعی که یک حد بالا (p) روی تعداد تسهیلاتی که باید فعال شوند وجود دارد، فرمول بندی شده است، بطوری که بیشترین تقاضا پوشش داده شود. بنابراین MCLP فرض می کند که تسهیلات لازم برای پوشش تمامی گره‌های تقاضا نداریم. اگر تمامی گره‌ها نتوانند پوشش یابند، مدل رویه‌ای را جستجو می‌کند که بیشترین تقاضا پوشش داده شود.

برای فرموله کردن MCLP تعاریف زیر را داریم:

I: 1,…,m مجموعه گره‌های تقاضا؛

J: 1,…,N مجموعه گره‌های کاندید برای جایابی تسهیلات جدید؛

h_i: تقاضای گره i ؛

P: تعداد تسهیلات که باید فعال شوند؛

و متغیر تصمیم:

$$z_i : \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } i \text{ پوشش داده شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

حال مساله MCLP به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\max \sum_{i \in I} h_i z_i \qquad (1)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_j - z_i \geq 0 \quad \forall i \in I \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \qquad (3)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \qquad (4)$$

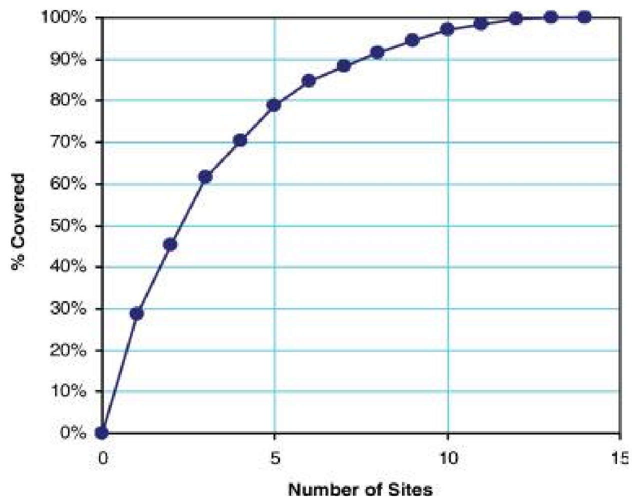
$$z_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \qquad (5)$$

تابع هدف (1) کل تقاضای پوشش داده شده را ماکزیمم می‌کند. محدودیت (2) نشان می‌دهد تا زمانی که یک محل کاندید برای پوشش گره i فعال نشده، گره i به عنوان یک گره پوشش یافته محسوب نشود. محدودیت (3) تعداد تسهیلاتی که باید فعال شوند را محدود می‌کند. محدودیت های (4) و (5) نشان می دهند که متغیرهای Z_i و X_i باینری هستند. به وضوح

[1]. Maximal Covering Location Problem

محدودیت‌های (2) و (4) به ما اجازه می‌دهند که محدودیت (5) را با $Z_i \le 1, \forall i \in I$ جایگزین کنیم بدون آنکه از کلیت مساله کاسته شود.

داسکین از داده‌های واقعی جهت تشریح این مدلها استفاده نمود[9]. مطالعات انجام شده بدین صورت بود که ایالات متحده را به 500 بخش مختلف تقسیم و تقاضای هر ناحیه را میزان جمعیت آن در نظر گرفت. همچنین، فاصله پوششی نیز مقدار 300 مایل تعیین گردید. با این فرضیات تعداد 14 تسهیل مورد نیاز بودند تا کلیه تقاضاها برآورده شوند. با این حال، تنها با 7 تسهیل جدید، تقریباً 88,3 درصد تقاضاها تحت پوشش قرار می‌گرفت. **شکل 5** درصد تقاضای پوشش داده شده در برابر تعداد تسهیلات مورد نیاز برای بخش‌های ایالات متحده نمایش داده شده‌اند.



شکل 5: درصد تقاضای پوشش داده شده در برابر تعداد مکانها برای 500 منطقه در ایالات متحده

3-1-1-6 مدل P-Center

مدل مذکور در جهت یافتن کوچکترین فاصله پوششی ممکن به طوریکه هر گره تحت پوشش قرار گیرد، می‌باشد. لذا به جای دادن فاصله پوشش S به مدل، کمترین فاصله پوشش مرتبط با قرارگیری P تسهیل جدید توسط مدل محاسبه می‌گردد. تابع هدف آن از نوع minmax و به صورت زیر می‌باشد:

Min max(فاصله وزن‌دهی شده تقاضا[1])

این مسئله به مسئله minmax نیز مشهور است. اگر مکان تسهیلات محدود به گره‌های شبکه گردد، مسئله به نام vertex center problem و اگر تسهیلات جدید در هر جایی از شبکه قرار گیرند به absolute center problem شناخته شده‌اند. در مسئله نمونه مطرح شده برای 10-Center حداکثر فاصله‌ای که کلیه گره‌ها تحت پوشش قرار گیرند 373 است.

مساله p–مرکز برای مینیمم کردن حداکثر فاصله بین یک نقطه تقاضا و تسهیل تخصیص یافته به آن ارائه شد. چندین نوع مدل پایه p–مرکز وجود دارد. مساله p-مرکز که محل مجموعه تسهیلات کاندید را به گره‌های شبکه محدود می‌کند و مساله p-مرکز کامل که به تسهیلات اجازه می‌دهد که هر جایی روی کمان‌های شبکه نیز قرار گیرد. هر دو نوع می‌تواند وزن دار یا بدون وزن باشد. در مساله غیر وزن‌دار، تمامی گره های تقاضا رفتار یکسانی دارند. در مدل وزن‌دار فاصله بین گره‌های تقاضا و تسهیلات، در وزن مربوط به هر گره تقاضا ضرب می شود. برای مثال این وزن می‌تواند اهمیت گره را مشخص کند. در واقع این گونه مسائل جهت استقرار خدمات اورژانس مانند آتش‌نشانی، خدمات آمبولانس و مراکز پلیس در جامعه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

با توجه به تعاریف قبلی و متغیرهای تصمیم داریم:

W : ماکزیمم فاصله بین یک گره تقاضا و تسهیل تخصیص یافته به آن

$$y_{ij} : \begin{cases} 1 & \text{اگر تقاضای گره } i \text{ به تسهیل گره } j \text{ تخصیص یابد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

مساله p-مرکز می‌تواند بصورت زیر فرموله شود:

[1]. demand-weighted distance

$$\min \quad W \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in J} x_j = p \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall i\in I \qquad (3)$$

$$y_{ij} - x_j \le 0 \quad \forall i\in I, j\in J \qquad (4)$$

$$W - \sum_{j\in J} h_i d_{ij} y_{ij} \ge 0 \quad \forall i\in I \qquad (5)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j\in J \qquad (6)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i\in I, j\in J \qquad (7)$$

تابع هدف (1) ماکزیمم فاصله وزن‌دهی شده تقاضا بین هر گره تقاضا و نزدیکترین تسهیل فعال شده را مینیمم می‌کند. محدودیت (2) نشان می‌دهد که P تسهیل باید فعال شوند. محدودیت (3) نشان می‌دهد که هر گره تقاضا فقط باید به یک تسهیل اختصاص یابد. محدودیت (4) نشان می‌دهد که تخصیص فقط به تسهیلات فعال انجام شود. محدودیت (5) یک حد پایین برای ماکزیمم فاصله وزن دهی‌شده تقاضا تعریف می‌کند که باید مینیمم شود. بدین معنی که حداکثر فاصله بین تقاضای گره i و نزدیکترین تسهیل قرار گرفته از آن را اندازه‌گیری می‌نماید. محدودیت (6) و (7) نشان می‌دهند که x_i و y_{ij} باینری هستند.

6-1-2 **مدل‌های میانه**

فاصله در مدلهای پوششی عموماً به صورت باینری بوده به طوریکه هر گره یا تحت پوشش قرار می‌گیرد، یا نه. در حالیکه مدلهای میانه از فواصل واقعی استفاده می‌نمایند.

6-1-2-1 **P-Median**

این مدل p تسهیل جدید را به گونه‌ای بین مشتریان قرار می‌دهد که کل فاصله وزنی بین مشتریان و نزدیک‌ترین تسهیل به آنها کمینه گردد.

این مدل در 1964 و 1965 توسط حکیمی مطرح شد و او ثابت کرد که در یک شبکه به هم پیوسته مکانهای بهینه همیشه روی گره‌ها قرار دارند. هدف از حل این دسته مسائل، حداقل کردن مجموع فاصله طی شده برای پاسخگویی به تقاضا در هر گره توسط یک وسیله که فاصله آن تا گره داده شده است؛ ضمن اینکه

بایستی تمام تقاضاها نیز برآورده شوند. این مسأله زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد کـه بخـواهیم تسـهیلی را مکان‌یابی کنیم که سرویس عادی و روزمره را ارائه می‌دهد.

هزینه ممکن است بر حسب زمان، پول، تعداد سفر، مسافت کل یا هر مقیاس دیگری بیان شود. به علت این که در این گونه مسائل، هدف حداقل کردن هزینه کل است، با نام مسائل حداقل مجموع یا مسأله وبر نیز مطرح می شوند. اگر برای هر نقطه تقاضا وزن مخصوص وجود داشته باشد به طوری که در تـابع هـدف نقـاط تقاضا ضرایب برابر نداشته باشند، این مسأله P-Median موزون نامیده می‌شود. مـدل P-median بـه صـورت زیر فرموله می‌گردد:

جدول 2: مدل P-Median و پارامترهای آن

مدل مسئله	مقادیر معلوم مدل	متغیرهای تصمیم مسئله
$\min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} y_{ij}$ (1) $\sum_{j\in J} x_j = p$ (2) $\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$ (3) $y_{ij} - x_j \le 0 \quad \forall i \in I, j \in J$ (4) $x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J$ (5) $y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J$ (6)	I: مجموعه مشتریان J: مجموعه مکان‌های کاندید h_i: میزان تقاضای مشتری iام. P: تعداد تسهیلات جدید	Y_{ij}: اگـر مشـتری i بـه تسـهیل قـرار گرفته در مکـان کاندیـد j تخصـیص یابـد 1 در غیـر اینصـورت مقـدار آن صفر خواهد بود (متغیر تخصیص). X_j: اگر تسهیل جدید در مکان کاندید j قرار گیـرد یـک در غیـر اینصـورت صفر است.

تابع هدف (1) کل فاصله وزن‌دهی شده تقاضا را مینیمم می‌کند. محدودیت (3) و (4) مشابه محدودیت های (2) و (4) مدل p-مرکز است. محدودیت های (5) و (6) نشان می‌دهد متغیرهای x_j و y_{ij} باینری هستند. در این مدل فرض شده که محل های بالقوه تسهیلات، گره‌های شبکه هستند. مانند مساله p-مرکز، مسـأله p-میانـه بـه ازای مقـادیر ثابـت p می‌تواند در زمان چندجمله‌ای حل شود اما برای مقادیر متغیر p، NP- hard به شمار می‌رود.

6-1-2-2 مسئله مکان‌یابی fixed charge

مساله p-میانه سه فرض مهم دارد که ممکن است بـرای سـناریوهای معینـی مناسـب نباشـد. **اول** اینکـه بـین هزینه‌های ثابت جایابی تسهیلات تمایز قایل نشده و همه آنها را یکسان فرض می‌نماید. **دوم** آنکه فـرض

می کند تسهیلات جایابی شده، ظرفیت نامحدود برای تقاضاکنندگان دارند و **نهایتاً** اینکه فرض می‌کند ما می‌دانیم چند تسهیل باید بازگشایی شوند (p).

مساله جایابی(FCLP) Fixed Charge Location Problem ظرفیت‌دار یا Capacitated Facility Location Problem (CFLP) تمامی این 3 فرض را آزاد می‌کند. هدف FCLP، مینیمم کردن هزینه ثابت کل تسهیلات و هزینه حمل‌ونقل است. بنابراین مقدار بهینه تعداد و مکان تسهیلات را مانند تخصیص تقاضاها به تسهیلات، تعیین می‌کند. با توجه به اینکه، ظرفیت تسهیلات نامحدود نیست، **خاصیت تک تخصیصی**[1]دیگر برقرار نبوده و تقاضا ممکن است به نزدیکترین تسهیل تخصیص نیابد. بنابراین خاصیت در مسائل مکان‌یابی تسهیلات بدون محدودیت ظرفیت تقاضای هر مشتری توسط نزدیکترین تسهیل واقع شده به آن پوشش داده خواهد شد.

دو مرحله در فرآیند تصمیم‌گیری شناسایی می‌شوند. در مرحله اول در مورد تعداد تسهیلاتی که می‌بایست فعال شوند تصمیم‌گیری می‌شود و در مرحله دوم مشتریان و سطح خدمت‌دهی آنها تخصیص داده می‌شود. اگر محدودیتی مبنی بر لزوم خدمتدهی هر مشتری فقط توسط یک تسهیل وجود داشته باشد، این مسئله SSCFLP[2] نامیده می‌شود. مسئله جایابی تسهیلات ظرفیت دار با هزینه ثابت استقرار زیر مجموعه ای از تسهیلات کاندید را به نحوی انجام می‌دهند که مجموعه مشتریان، با کمترین هزینه خدمت‌دهی شوند. در این مسئله هر مشتری تقاضای مخصوص به خود داشته و هر تسهیل نیز ظرفیت محدودی در خدمتدهی دارد. روشهای متعددی برای حل این مسائل ارائه شده است که در دو گروه عمده دقیق و تقریبی قرار می‌گیرند. روشهایی مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ به همراه یک روش جستجوی محلی در حل این مسائل به نتایج خوبی رسیده‌اند. این گونه روشها معمولا در حالت خاص تعریف می‌شوند و نتایج آنها به اندازه ابعاد مساله و نحوه تعریف متغیرها تخصیص وابسته است.

با توجه به تعاریف قبلی و ورودی های زیر داریم می‌توان مدل مسئله را به صورت زیر نوشت:

f_j: هزینه ثابت فعال کردن یک تسهیل در محل پیشنهادی J

c_j: ظرفیت یک تسهیل در محل کاندیدJ

a: هزینه هر واحد تقاضا در واحد فاصله

مساله جایابی ظرفیت دار fixed charge به صورت زیر فرموله می‌شود:

[1]. Single Assignment Property

[2]. Single Source Capacitated Facility Location Problem

$$\min \quad \sum_{j\in J} f_j x_j + a\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} y_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall i\in I \qquad (2)$$

$$y_{ij} - x_j \le 0 \quad \forall i\in I, j\in J \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in J} h_i y_{ij} - C_j x_j \le 0 \quad \forall j\in I \qquad (4)$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j\in J \qquad (5)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i\in I, j\in J \qquad (6)$$

تابع هدف (1) مجموع هزینه‌های ثابت و کل هزینه‌های حمل‌ونقل جهت برآورد تقاضای مشتریان توسط تسهیلات را مینیمم می‌نماید. محدودیت (4) اجازه نمی‌دهد کل تقاضای تخصیص یافته به یک تسهیل از ظرفیت آن تسهیل بیشتر شود.

محدودیت های (2)، (3)، (5) و (6) مشابه محدودیت مسائل قبل است. آزادسازی محدودیت (6) باعث می‌شود تقاضای یک گره به چندین تسهیل، تخصیص یابد.

اگر محدودیت (4) حذف شود، مدل به مسأله جایابی fixed change با ظرفیت نامحدود (UFCLP) تبدیل می‌شود. در این مورد تقاضای هر مشتری می‌تواند با نزدیکترین تسهیل ارضاء شود و محدودیت (6) می‌تواند با محدودیت غیرمنفی برای y_{ij} تعویض شود.

خلاصه‌ای از نتایج محاسبات مسئله نمونه ذکر شده در ایالات متحده برای مدل‌های مختلف ذکر شده و با در نظر گرفتن p=10 در **جدول** 3 داده شده‌اند. در این مسئله نواحی مختلف برحسب میزان جمعیت آنها (بزرگ به کوچک) از یک تا 500 شماره‌بندی شده‌اند. مسئله با استفاده از سه مدل حل شده و جواب آن با استفاده از مدل UFLP نیز محاسبه شده است. نتایج محاسباتی نشان داد که:

1- مدل P-center مقدار تقاضا را نادیده گرفته و تمایل دارد تسهیلات جدید را در مکان‌های کم-جمعیت‌تر ولی مرکزی‌تر قرار دهد. به طوریکه میانگین شماره مناطق انتخاب شده در این مدل 328 است.

2- مسئله حداکثر پوشش نسبت به مدل P-center به مناطق پرجمعیت اهمیت بیشتری می‌دهد.

3- مسئله P-median به جمعیت و فاصله اهمیت داده و تمایل به جایابی تسهیلات در مکان‌های پرجمعیت بیشتر است.

4- علاوه بر موارد فوق اختلاف معنی‌داری نیز در توابع هدف دیده می‌شود. بـه طوریکـه تقریبـاً 97,15 درصد از تقاضاها با 10 تسهیل و فاصله پوشش 300 مایل تحت پوشش قرار می‌گیرنـد و ایـن مقـدار درصورت پوشش‌دهی به کلیه نقاط به 373 مایل افزایش می‌یابد.

جدول 3: خلاصه‌ای از نتایج محاسبات مسئله نمونه ذکر شده

	Solution		
	Max covering	*p*-center	*p*-median
Objective			
Max covering	**97.1**	86.8%	88.2%
p-center	507	**373**	565
p-median	176.5	219.2	**134.6**
UFLP	$2,839,650	$3,285,141	$2,403,191
Sites	52 - Pima C., AZ	159 - Tulare C., CA	1 - Los Angeles C., CA
	150 - Knox C., TN	162 - Pulaski C., AR	21 - Alameda C., CA
	159 - Tulare C., CA	242 - Bell C., TX	42 - DuPage C., IL
	163 - Waukesha C., WI	257 - Alachua C., FL	70 - Pierce C., WA
	180 - Luzerne C., PA	274 - Kanawha C., WV	87 - Hudson C., NJ
	229 - Galveston C., TX	280 - Weber C., UT	104 - Jefferson C., CO
	253 - Yakima C., WA	462 - Deschutes C., OR	118 - Polk C., FL
	257 - Alachua C., FL	469 - San Juan C., NM	196 - Lorain C., OH
	460 - Mesa C., CO	478 - Jefferson C., NY	348 - Brazos C., TX
	500 - Jasper C., MO	496 - La Crosse C., WI	389 - Hall C., GA
Average site number	240.3	327.9	137.6

لذا می‌توان نتیجه گرفت که:

جواب بهینه برای هر تابع هدفی ممکن است عملکرد ضعیفی را نسبت به دیگر توابع هدف داشته باشد ولی با این وجود اغلب جواب‌های خوبی خواهند داد.

6-1-3 سایر مدل‌ها

6-1-3-1 P-Dispertion

در تمامی مدلهای فوق، با فاصله بین تقاضا و تسهیلات جدید سروکار داشتیم. همچنین یک فـرض ناگفتـه ایـن است که نزدیکی به یک تسهیل، خوشایند است. مساله p-پخشی (PDP) با این مسائل در دو مورد متفـاوت اسـت[10]. **اول** اینکه فقط فاصله بین دو تسهیل جدید مورد نظر است و **دوم** اینکه هدف ماکزیمم کردن مینیمم فاصـله بـین هـر جفت تسهیل جدید است.

یکی از اهداف تعریف شده در علم جایابی عبارتست از ماکزیمم کردن پراکندگی. تسـهیلات ممکـن اسـت بنـابر دلایل متفاوتی پراکنده شوند. پخش کردن مراکز بازپروری مجرمین و همچنین سایتهای مربـوط بـه تسـهیلات انـرژی هسته‌ای بطریقی که امنیت افزایش یابد از این جمله هستند. همچنین ایـن مسـاله در تکنولـوژی ارتباطـات کـاربرد دارد

(جایی که تجهیزات فرستنده و گیرنده بهتر است از هم فاصله داشته باشند تا مشکلات تداخل امواج کاهش یابند). جایابی ایستگاههای خدماتی و مراکز خرید نیز از چنین مواردی هستند زیرا رقابت متقابل باید کاهش یابند. با وجود اینکه مدلهای پخشی عمومی در سطح گسترده‌ای توسعه یافته‌اند ولی تنها یکی از آنها ترکیبی از چندین نوع تسهیل را در نظر گرفته است. این مساله به جایابی p تسهیل در n مکان کاندید مربوط می‌شود به نحوی که کمترین فاصله بین تسهیلات ماکزیمم شود. در برخی از مسائل واقعی هزینه مراودات بین تسهیلات نیز در نظر گرفته شده است. نوع دیگری از این مسائل، مسائل p پخشی مجموع (p-dispersion-sum) نام دارد که هدف آن ماکزیمم کردن میانگین فاصله بین دو تسهیل می‌باشد.

مدل p پخشی کلاسیک دارای 3 فرض مهم می‌باشد که برای شرایط واقعی چندان مناسب نیستند. نخست آنکه هزینه ثابت استقرار تسهیلات یکسان فرض شده است. دوم آنکه تسهیلات دارای ظرفیت محدود نمی‌باشند و نهایتا اینکه تعداد تسهیلات از پیش تعیین شده و برابر p می‌باشد.

برای فرمول بندی این مدل ما نیاز داریم یک ورودی M و یک متغیر تصمیم D را به صورت زیر تعریف کنیم:

M: یک ثابت بزرگ

D: کمترین فاصله بین هر جفت از تسهیلات

با این تعاریف، مساله p-پراکندگی به صورت زیر مدل می شود:

$$\max \quad D \tag{1}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \tag{2}$$

$$D + (M - d_{ij})x_i + (M - d_{ij})x_j \le 2M - d_{ij} \qquad \forall i, j \in J, i < j \tag{3}$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \tag{4}$$

تابع هدف (1)، کمترین فاصله بین دو تسهیل را ماکزیمم می‌کند. محدودیت (2) نشان می‌دهد که p تسهیل باید جایابی شود. محدودیت (3) کمترین فاصله بین هر جفت از تسهیلات فعال را تعیین می‌کند. توجه که اگر x_i یا x_j صفر باشند، محدودیت غیرفعال می‌شود. اما اگر هر دو برابر یک شوند، محدودیت به $D <= d_{ij}$ تبدیل می‌شود. بنابراین max D باعث می‌شود کمترین فاصله بین دو تسهیل فعال تا حد ممکن زیاد شود.

2-3-1-6 مسائل جایابی p-محور (p-hub)

هاب‌ها تجهیزات مخصوصی هستند که کارSwitching را در حمل‌ونقل‌های سیستم‌های توزیع چند مرحله ای بر عهده دارند. به جای اینکه مقصد و مبدأ به صورت مستقیم با هم ارتباط داشته باشند، از طریق هاب‌ها ارتباط برقرار می‌کنند. هاب‌ها بر جریانات بین مقاصد به منظور بهبودهای اقتصادی تمرکز می‌نمایند.

با ایجاد قطب‌ها میانگین هزینه حمل‌ونقل و زمان تحویل کاهش می‌یابد. مسأله جایابی هاب‌ها با تعیین مکان قرار گرفتن هاب‌ها و تخصیص نقاط تقاضا به هر یک از هاب‌ها به منظور تعیین مسیرهای بین هر جفت مبدا-مقصد سر و کار دارد. در مسأله جایابی هاب‌ها شبکه ا n گره وجود دارد که مکان‌های مقاصد، مبدأها و هاب‌ها بر روی این گره‌ها قرار می‌گیرد. جریانات بین مقصدها و مبدأها ازجنس هزینه، زمان، مسافت و امثال آن در نظر گرفته می‌شود.

مدلهای مختلفی برای این دسته از مسائل براساس هشت ویژگی زیر ارائه شده است:

1- فضا ی مسأله{گسسته-پیوسته}
2- تابع هدف{MiniSum یا MiniMax}
3- معین بودن تعداد محورها{معین-نا معین}
4- تعداد محورها{ تک محور-چند محور }
5- ظرفیت محورها{محدود –نا محدود}
6- هزینه استقرار{در نظر گرفتن هزینه های ثابت و متغیر یا ...}
7- اتصال گره به محور {هر گره بتواند به چند محور متصل شود؟}
8 –هزینه اتصال گره به محور{بدون هزینه-هزینه ثابت-هزینه متغیر}

به طور خلاصه می توان گفت تابع هدف در مسائل محور عبارتند از:

1)MiniSum
2)MiniMax

مساله پایه جایابی p-محور با توجه به تعاریف و متغیرهای زیر می‌تواند بصورت زیر فرموله شود[11].

$$\min \quad \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} h_{ij}\left(\sum_{k\in N} c_{ik}y_{ik} + \sum_{m\in N} c_{jm}y_{jm} + a\sum_{k\in N}\sum_{k\in N} c_{km}y_{ik}y_{jm}\right) \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in N} x_j = p \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I \qquad (3)$$

$$y_{ij} - x_j \le 0 \quad \forall i \in I, j \in J \qquad (4)$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \qquad (5)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (6)$$

h_{ij}: تعداد کالاهایی که بین گره i و j جریان دارد.

c_{ij}: واحد هزینه حمل بین گره i و j .

a : فاکتور تخفیف برای حمل بین محورها

$$x_j : \begin{cases} 1 & \text{اگر یک محور در گره j فعال شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$y_{ij} : \begin{cases} 1 & \text{اگر تقاضا در گره i به محور فعال شده در گره j تخصیص یابد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تابع هدف (1) مجموع هزینه جابجایی بین یک گره غیرمحور و محور، هزینه جابجایی محور نهایی بـه مقصـد و جابجایی‌های بین دو محور را که با فاکتور a کم می‌شود، مینیمم می‌کند. محدودیت های (2) و (6) مانند مدلهای قبلی هستند. محدودیت (3) بیان می‌کند که هر گره باید دقیقاً به یک محور تخصیص یابد.

6-1-3-3 مساله جایابی حداکثر مجموع (maxisum)

مدلهای میانگین فاصله که در فوق مورد بحث قرار گرفت فرض می‌کند جایابی تسهیلات تا حد ممکن نزدیک به تقاضا، مطلوب است. برای بسیاری از تسهیلات این امر مطلوب است اما برای تسهیلات نامطبوع (مانند سموم، نیروگاه و انبار ضایعات جامد) حداقل یک هدف شامل جایابی تسهیلات دور از گره‌های تقاضا می‌باشد.

مساله جایابی حداکثر مجموع تلاش می‌کند p تسهیل را طوری جایابی کند که کـل فاصـله وزن‌دار تقاضـا بـین گره‌های تقاضا و تسهیلاتی که به آنها تخصیص یافته است، ماکزیمم شود. مدل می‌تواند به صورت زیر فرموله شود.

$$\max \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} y_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in J} x_j = p \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \qquad (3)$$

$$y_{ij} - x_j \le 0 \quad \forall i \in I, j \in J \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_{i[k]_i} - x_{[m]_i} \ge 0 \quad \forall i \in I, m = 1, \mathbf{K}, N-1 \qquad (5)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \qquad (6)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J \qquad (7)$$

فرمولاسیون این مدل مانند مساله p-میانه است با 2 تفاوت مهم. **اول** اینکه هدف (1) ماکزیمم کردن فاصله کل وزن دهی شده تقاضا است نه مینیمم کردن آن. **تفاوت بعد مساله**، فشار آوردن به تقاضا است بطوری که در دورترین حالت ممکن از تسهیلات قرار گیرد. بنابراین مدل‌سازی با محدودیت (5) گسترش می‌یابد که تضمین می‌کند تقاضاها به نزدیکترین تسهیل تخصیص یابند. در این محدودیت، $[k]_i$ شاخص k امین محل کاندید دور برای تقاضای گره i می‌باشد. محدودیت (5) بنابراین بیان می‌کند که اگر m امین تسهیل نزدیک به تقاضای گره i فعال شود، سپس تقاضای گره i باید به آن تسهیل یا تسهیلات نزدیکتر تخصیص یابد.

4-3-1-6 مسأله ترکیبی جایابی - مسیریابی(LRP)[1]

به طور کلی مدل‌های ترکیبی جایابی- مسیریابی(Location-Routing Problem) به طور همزمان بـه حـل دو مسأله می‌پردازند:

1. مسأله تعیین تعداد، ظرفیت و مکان بهینه تسهیلاتی که به بیش از یک مشتری خدمت رسانی می‌کنند.
2. مسأله یافتن بهترین زمان بندی و مسیر وسایل

به طور کلی این مسأله به صورت استقرار یک یا چند تسهیل جدید در مکان‌های کاندید و یا در فضای پیوسته و همچنین انتخاب مسیرهای تحویل از آن‌ها به مشتریان (مصرف‌کنندگان) تعریف می‌شود. **تفاوت اصلی** مسائل جایابی- مسیریابی (LRP) و مسائل کلاسیک جایابی- تخصیص در این است که پس از تعیین مکان تسـهیلات، در مـدل‌هـای LRP نحوه قرار گرفتن مشتریان در طول مسیر مورد بررسی قرار می‌گیرد(سفرهای گردشی)، در حالی که در مدل های معمولی فرض می‌شود که مشتریان به صورت مستقیم از تسهیل مربوطه خدمت دریافت می‌کنند (سفرهای شـعاعی). بـه

[1]Location -routing problem

طور کلی مسائل مکان یابی - مسیریابی به هر دو نوع مسائل کلاسیک مکان یابی و مسیریابی مرتبط هستند و هـر دو مسأله، حالت خاصی از این مسأله به شمار می‌آیند.

در ادامه مدل عمومی مسأله LRP را به طور مختصر بررسی می‌نماییم:

این مسأله به دنبال انتخاب یک انبار از بین n نقطه پیشنهادی و سپس ارائه سرویس از این انبار بـه سـایر نقـاط موجود با هدف min کردن هزینه‌های عملیاتی و مسیریابی است. لازم به ذکر است که در اینجـا مکـان بـالقوه انبـار از سایت‌هایی که می‌بایستی خدمت بگیرند جدا نشده است ولی در صورت انتخاب یک سایت به عنـوان انبـار، تقاضـای آن سایت صفر در نظر گرفته می شود.

پارامترهای مسأله:

n : تعداد کل نقاط موجود

m : تعداد فروشنده‌ها

$D=(d_{ij})$: ماتریس فاصله بین نقاط

f_k : هزینه عملکردی انبار در نقطه k

متغیرهای مسأله :

x_{ij}: تعداد دفعاتی که کمان (i,j) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } k \text{ به عنوان انبار مورد استفاده قرار گیرد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

فرمول‌بندی مسأله به صورت زیر می‌باشد :

$$\text{Minimize} \quad \sum\sum_{i<j} d_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{n} f_k y_k ,$$

subject to

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = 1. \qquad (1)$$

$$\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} \qquad (2)$$
$$= 2 + 2(m-1)y_k, \quad (k = 1, ..., n).$$

$$\sum_{\substack{i<j \\ i,j \in S}} x_{ij} \leqslant |S| - 1 + (m-1) \sum_{k \in S} y_k, \qquad (3)$$

$$(\text{for all } S \subseteq \{1, ..., n\} \text{ and } 2 \leqslant |S| \leqslant n-2).$$

$$x_{ij} = 0, 1, 2; \quad y_k = 0, 1, \qquad (4)$$
$$(i < j; \quad k = 1, ..., n).$$

در این مدل محدودیت (1) به این معنی است که فقط یک شهر به عنوان انبار باید انتخاب گردد. محـدودیت (2) همان محدودیت درجه در مدل TSP است با این تفاوت که در اینجا اگر گرهی به عنوان انبـار اسـتفاده شـود $(y_k=1)$ درجه گره باید برابر 2 شود (به دلیل خروج m فروشنده از گره و ورود آنها به همان گره) و در غیر این صورت درجـه گره همان 2 است.

محدودیت (3) تضمین می‌کند که جواب هـیچ زیـر مسـیر غیـر قـانونی نـدارد. در واقـع ایـن محـدودیت همـان محدودیت‌های حذف زیر دور در مدل TSP است با این تفاوت که اگر مجموعه s در بردارنـده یـک انبـار باشـد تعـداد کمان‌های در بر گرفته شده در این مجموعه به تعداد m فروشنده می‌تواند اضافه شود.

6-1-3-5 دیگر مدل‌ها

لازم ذکر است که علاوه بر مدل‌های فوق، مدل‌های زیادی در حوزه‌ی مکان‌یابی تسهیلات در دو دهـه‌ی اخیـر توسعه داده شده‌اند که می‌توان به مواردی نظیر مدل‌های مکان‌یابی هاب، مدل‌های مکان‌یـابی-مسـیریـابی، مـدل‌هـای مکان‌یابی-موجودی، مدل‌های مکان‌یابی رقابتی، مدل‌های لجستیک معکوس و ... اشاره نمود. هدف یا اهدافی در هریک از این مدل‌ها مدنظر بوده که بایستی با توجه به یکسری از محدودیت برآورده گردد. مقالات مروری زیادی نیز در حـوزه مکان‌یابی تسهیلات به بررسی این مدل‌ها پرداخته‌اند که از آنجمله می‌توان به منابع [12-16]اشاره شود.

منابع و مراجع

.1 I Chien Liu, *An Optimization Approach for Multi Facility Capacitated Location-Allocation Problems*, in *The Department of Industrial Engineering*2005, University of Houston.

.2 Weber, A., *Uber den Standort der Industrian,Translated as (at 1929): Alferd Weber's Theory of the Location of Industies, University of Chicago Press,*. 1909.

.3 Weizfeld, E., *Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donne et minimum.* Tohoku Mathematical Journal, 1937. **34**: p. 355-386.

.4 Current, J., M. Daskin, and D. Schilling, *Discrete N etw ork Location Models.* 2002.

.5 Love, R.F., J.G. Morris, and G.O. Wesolowsky, *Facilities Location: Models and Methods*1988, New York: North-Holland.

.6 TREVOR S. HALE and CHRISTOPHER R. MOBERG, *Location Science Research: A Review.* Annals of Operations Research 2003. **123**: p. 21-35.

.7 LAWRENCE V. SNYDER, *Facility location under uncertainty: a review.* IIE Transactions, 2006. **38**: p. 537–554.

.8 C.S. ReVelle, H.A. Eiselt, and M.S. Daskin, *A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science.* European Journal of Operational Research, 2008. **184**: p. 817–848.

.9 Daskin, M.S., *What you should know about location modeling.* Naval Research Logistics (NRL), 2008. **55**(4): p. 283-294.

.10 Kuby, M.J., *Programming Models for Facility Dispersion: The pâگ€Dispersion and Maxisum Dispersion Problems.* Geographical Analysis, 1987. **19**(4): p. 315-329.

.11 O'Kelly, M.E., *The location of interacting hub facilities.* Transportation Science, 1986. 20(2): . 92-106.

.12 Melo, M.T., S. Nickel, and F. Saldanha-da-Gama, *Facility location and supply chain management – A review.* European Journal of Operational Research, 2009. **196** (2): p. 401-412.

.13 ReVelle, C.S., H.A. Eiselt, and M.S. Daskin, *A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science.* European Journal of Operational Research, 2008. **184**(3): p. 817-848.

.14 Alumur, S. and B.Y. Kara, *Network hub location problems: The state of the art.* European Journal of Operational Research, 2008. **190**(1): p.1-21 .

.15 Nagy, G. and S. Salhi, *Location-routing: Issues, models and methods.* European Journal of Operational Research, 2007. **177**(2): p. 649–672.

.16 Klose, A. and A. Drexl, *Facility location models for distribution system design.* European Journal of Operational Research, 2005. **162**(1): p. 4-29.